

91078

B.Sc.-I 1st Semester (Pass Course) Examination,

November-2014

MATHEMATICS

Paper-BM-111

Algebra

Time allowed : 3 hours]

[Maximum marks : 40]

Note : Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each section. **Section-V is compulsory.** Each question for **Section I-IV** are of 7 (4+3) marks and each part of **Section-V** is of 2 marks.

नोट : प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। खण्ड-V अनिवार्य है। खण्ड-I-IV के लिए प्रत्येक प्रश्न 7 (4+3) अंकों के हैं तथा खण्ड-V का प्रत्येक भाग 2 अंकों का है।

Section-I

खण्ड-I

1. (a) Show that every matrix can be expressed in one and only way as  $P+iQ$  where P and Q are Hermitian matrices.

दिखाइए कि प्रत्येक आधात्री को एक तथा केवल एक ही तरीके  $P+iQ$  के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ P व Q हर्मिशियन आधात्रियां हैं।

( 2 )

**91078**

- (b) Find the non-singular matrices P and Q such that PAQ is in normal form, where

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

गैर एकल आधात्रियों P तथा Q ज्ञात कीजिए इस प्रकार से कि PAQ प्रसामान्य रूप में है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2. (a) Using Cayley-Hamilton theorem find  $A^{-1}$  if

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

केले-हैमिल्टन प्रमेय का उपयोग करते हुए  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए यदि

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**91078**

- (b) Prove that the constant term of Characteristic polynomial (i.e.,  $\det(\lambda I_n - A)$ ) is  $(-1)^n \det(A)$ .

सिद्ध कीजिए कि लाक्षणिक बहुपद (अर्थात्  $\det(\lambda I_n - A)$ ) का स्थिर पद  $(-1)^n \det(A)$  है।

## Section-II

### खण्ड-II

3. (a) Check whether the following system of equations is consistent or not. Solve if it is consistent :

$$4x + 3y + 2z = -7, 2x + y - 4z = -1, x + 2y + z = 1$$

जाँच कीजिए तथा समीकरणों का निम्नलिखित निकाय संगत है अथवा नहीं। यदि यह संगत है तो हल कीजिए :

$$4x + 3y + 2z = -7, 2x + y - 4z = -1, x + 2y + z = 1$$

- (b) Solve :  $x - 2y + z - w = 0, x + y - 2z + 3w = 0,$

$$4x + y - 5z + 8w = 0, 5x - 7y + 2z - w = 0$$

हल कीजिए :  $x - 2y + z - w = 0, x + y - 2z + 3w = 0,$

$$4x + y - 5z + 8w = 0, 5x - 7y + 2z - w = 0$$

4. (a) If  $A$  is unitary and  $B = AP$ , where  $P$  is non-singular, then show that  $PB^{-1}$  is unitary.

यदि  $A$  एकात्मक है तथा  $B = AP$ , जहाँ  $P$  गैर-एकल है, तब दिखाइए कि  $PB^{-1}$  एकात्मक है।

- (b) Diagonalize the quadratic form

$$x^2 + 2 y^2 - 7 z^2 - 4 xy + 8 zx.$$

Also find the rank, index signature and equations of transformation.

द्विपदीय रूप  $x^2 + 2 y^2 - 7 z^2 - 4 xy + 8 zx$  को विकर्णकृत कीजिए। रूपांतरण की श्रेणी, अभिसूचक, हस्ताक्षर तथा समीकरणों को ज्ञात कीजिए।

### Section-III

#### खण्ड-III

5. (a) Solve the equation

$$x^4 + 15 x^3 + 70 x^2 + 120 x + 64 = 0,$$

roots being in G.P.

$$\text{समीकरण } x^4 + 15 x^3 + 70 x^2 + 120 x + 64 = 0,$$

को हल कीजिए मूल G.P. में हों।

- (b) Find the condition that the two roots of the equation  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  be equal.

शर्त ज्ञात कीजिए कि समीकरण  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  के दो मूल बराबर हों।

6. (a) Remove the second term from the equation  $x^4 + 4 x^3 + 2 x^2 - 4 x - 2 = 0$  and solve it.

समीकरण  $x^4 + 4 x^3 + 2 x^2 - 4 x - 2 = 0$  से दूसरा पद हटाइए तथा इसे हल कीजिए।

- (b) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of the equation  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ; form an equation whose roots are  $\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$

यदि  $\alpha, \beta, \gamma$  समीकरण  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ; के मूल हों;  
एक समीकरण बनाइए जिसके मूल हों  $\frac{\beta + \gamma}{\alpha}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta}, \frac{\alpha + \beta}{\gamma}$

#### Section-IV

##### खण्ड-IV

7. (a) Solve the equation  $x^3 - 12x + 8 = 0$  by Cardan's method.

कार्डन की विधि द्वारा समीकरण  $x^3 - 12x + 8 = 0$  को हल कीजिए।

- (b) Solve the equation

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0,$$

by Descarte's method.

देकार्टे की विधि द्वारा समीकरण

$$x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0,$$

को हल कीजिए।

8. (a) Solve the equation  $x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$ , by Ferrari's method.

फरारी की विधि द्वारा समीकरण

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0, \text{ को हल कीजिए।}$$

- (b) Discuss the nature of the roots of the cubic  
 $x^3 + 3 Hx + G = 0$

शांक्व  $x^3 + 3 Hx + G = 0$  के मूलों की प्रकृति की विवेचना कीजिए।

### Section-V

#### खण्ड-V

9. (a) If A and B are Hermitian, show that AB-BA is skew Hermitian.

यदि A तथा B हर्मांशियन हैं, दिखाइए कि AB-BA is विषम हर्मांशियन है।

- (b) Prove that the inverse of orthogonal matrix is orthogonal.

सिद्ध कीजिए कि लम्बकोणीय आधात्री का व्युत्क्रम लम्बकोणीय है।

- (c) Prove that the eigen value of  $A^2$  are square of the eigen values of A.

सिद्ध कीजिए कि  $A^2$  के आइजेन मान A के आइजेन मानों के वर्ग होते हैं।

- (d) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of the equation  
 $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ; then find  $\sum \frac{1}{\alpha}$

यदि  $\alpha, \beta, \gamma$  समीकरण  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ ; के मूल हैं;

तब  $\sum \frac{1}{\alpha}$  ज्ञात कीजिए।

( 7 )

**91078**

- (e) Solve the equation  $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ , the roots being in G.P.

समीकरण  $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ , को हल कीजिए, मूल G.P. में हों।

- (f) Form an equation with rational co-efficients two of whose roots are  $1+5i$  and  $5-i$

परिमेय गुणांकों सहित एक समीकरण बनाइए जिसके दो मूल  $1+5i$  तथा  $5-i$  हैं।

**91078**